

Sujet MPI - Le devoir dure 4h.

La présentation globale de la copie ainsi que l'homogénéité des formules est prise en compte dans la notation.

Problème I - Étude des bobines utilisées dans un couplage inductif non résonnant

Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique E3A PSI 2020.

Pour établir un couplage inductif non résonnant entre une bobine émettrice et une bobine réceptrice, on peut utiliser des solénoïdes ou des bobines « plates » 2D (voir figure 4).



FIGURE 4 – Bobines utilisées.

Considérons tout d'abord le cas d'un solénoïde de longueur ℓ et d'axe de révolution Oz, comportant N spires circulaires jointives de rayon a , et parcourues par un courant d'intensité variable $i(t)$. On fait l'hypothèse d'être dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS) : on calcule le champ magnétique créé par des courants variables $i(t)$, comme en magnétostatique par le théorème d'Ampère.

A1. Rappeler les équations locales de Maxwell relatives au champ magnétique \vec{B} . Comment se simplifient-elles dans l'ARQS ?

A2. Dans le cadre de l'ARQS, indiquer comment on passe de l'équation locale concernée au théorème d'Ampère.

On suppose dans la suite le solénoïde « infini » et on cherche à exprimer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace, repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On admet que le champ magnétique est identiquement nul à l'extérieur du solénoïde.

A3. Sous quelle(s) condition(s) l'approximation d'un solénoïde « infini » vous semble-t-elle légitime ?

A4. En invoquant des arguments de symétrie et d'invariance de la distribution de courants, déterminer la direction du champ $\vec{B}(M)$, ainsi que la (ou les) coordonnée(s) dont dépend(ent) son module.

A5. En précisant le contour d'Ampère choisi, montrer tout d'abord que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde. En choisissant un second contour d'Ampère, déterminer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde en fonction de ℓ , N et $i(t)$.

Intéressons-nous à présent au cas d'une bobine « plate », constituée (pour simplifier) de N spires circulaires identiques, d'axe de révolution Oz et de rayon a , placées dans le plan $z = 0$ et parcourues par un courant d'intensité $i(t)$. On se place à nouveau dans le cadre de l'ARQS et on considère un point M de l'axe Oz , de cote $z > 0$.

A6. Préciser, en justifiant votre réponse, la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ au point M .

A7. Que dire du plan d'équation $z = 0$ d'un point de vue des courants ? Qu'en déduire d'un point de vue du champ magnétique ? En déduire une relation simple entre $B_z(-z)$ et $B_z(z)$.

On donne l'expression du champ magnétique créé par la bobine « plate » au point M :

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 Ni(t) a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

A8. Représenter l'allure de la fonction $B_z(z)$. Exprimer le champ magnétique maximal $B_{z,\max}$, et déterminer à quelle distance $z_{1/2}$ de la spire le champ magnétique vaut $B_{z,\max}/2$, en fonction de a .

On donne sur la figure 5 les cartes de champ du solénoïde et de la bobine « plate », simulées à l'aide du logiciel FEMM (*Finite Element Method Magnetics*).

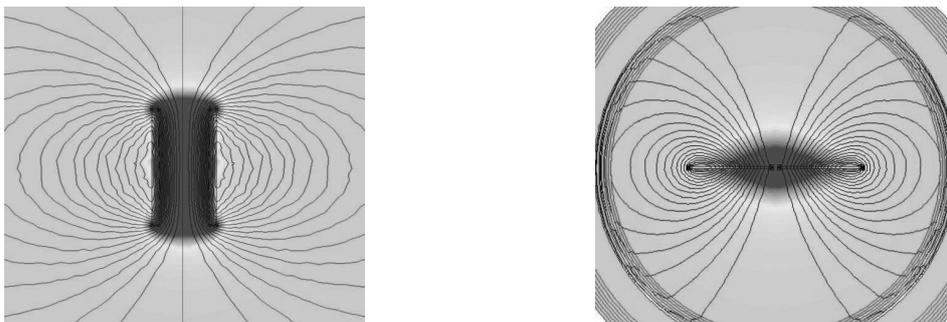


FIGURE 5 – Cartes de champ du solénoïde (à gauche) et de la bobine « plate » (à droite).

A9. Justifier les symétries et/ou antisymétries observées sur chacune de ces cartes de champ.

A10. Sur la carte de champ du solénoïde, on remarque que les lignes de champ se resserrent au sein du solénoïde et qu'elles y sont approximativement parallèles. Que peut-on déduire de ces observations topologiques ? Quelle propriété, relative au flux du champ \vec{B} , permet de le confirmer ?

Problème II - Le gecko

Ce sujet est extrait du concours CCINP PC 2021.

Données :

- ▷ Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
- ▷ Constante de Boltzmann : $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
- ▷ Définition du Debye : $1 \text{ D} = 3.33 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$
- ▷ Gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

Source : Autumn K., L'inusable adhésif des pattes du gecko, Pour la Science, n° 343, 2006, p. 82- 88.

Le gecko est un petit lézard capable de se déplacer à des vitesses de plusieurs mètres par seconde sur les murs ou les plafonds de pratiquement toutes natures, dans presque toutes les conditions. Des expériences menées en 2002 par l'équipe de l'américain Kellar Autumn ont montré que la spectaculaire faculté d'adhésion de l'animal est uniquement due à des forces de Van der Waals. L'adhésion est possible grâce à l'anatomie particulière des coussinets des doigts du lézard. Ces derniers sont recouverts de poils microscopiques, les sétules, ramifiés en des centaines de branches terminées par une spatule pouvant s'approcher à quelques nanomètres de la surface de contact.

II.1. Interactions entre molécules polaires

On considère une molécule polaire située dans le vide, modélisée par un dipôle électrique rigide de moment dipolaire électrique permanent $\vec{p}_1 = p_1 \vec{u}_z$. Le dipôle, centré en un point O , est constitué de deux charges ponctuelles opposées, $+q$ et $-q$ (avec $q > 0$), situées sur l'axe (O, \vec{u}_z) aux points respectifs P et N distants de $a = PN$ (figure 1). On repère tout point M de l'espace par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

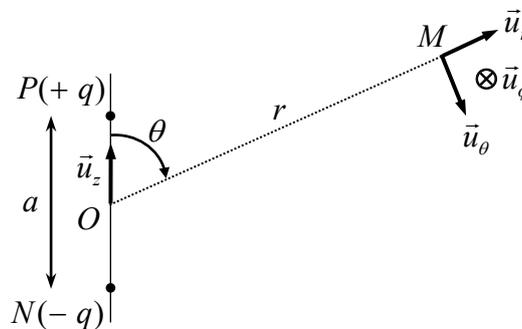


Fig. 1 – Dipôle électrique centré en un point O

II.1. Expliquer l'origine du moment dipolaire permanent de certaines molécules. Donner l'expression en fonction de a et q du moment dipolaire électrique \vec{p}_1 de la molécule polaire.

II.2. Établir l'expression du potentiel électrostatique $V_1(M)$ créé en M par la molécule polaire dans le cadre de l'approximation dipolaire qu'on explicitera. On donnera le résultat en fonction de p_1 , ϵ_0 et des coordonnées sphériques du point M .

II.3. En déduire que le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en M par la molécule polaire s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) .$$

Une seconde molécule polaire, modélisée par un dipôle rigide de moment dipolaire électrique permanent \vec{p}_2 , est située au point M sur l'axe (O, \vec{u}_z) tel que $\theta = 0$, à la distance r fixe du point O . À un instant donné, son moment dipolaire forme un angle α avec cet axe (figure 2). Dans ces conditions, la molécule

plongée dans le champ électrostatique dû à l'autre molécule située au point O subit un couple de forces de moment : $\vec{\Gamma} = \vec{p}_2 \wedge \vec{E}_1(M)$. On rappelle l'expression de l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules $\mathcal{E}_{12} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(M)$.

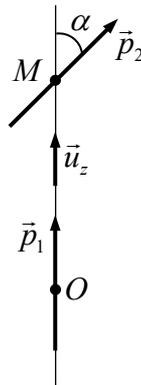


Fig. 2 – Interaction entre deux molécules polaires

II.4. Quel est l'effet du couple de forces subi par la molécule fixée au point M ? Justifier l'orientation de son moment dipolaire électrique lorsqu'elle est en équilibre stable.

Les deux molécules sont supposées identiques, de moments dipolaires électriques de même valeur $p_1 = p_2 = p = 1 \text{ D}$.

II.5. Estimer l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules, distantes de $r = 0.5 \text{ nm}$, en supposant leurs moments dipolaires électriques alignés. Comparer cette énergie à l'énergie d'agitation thermique qui est de l'ordre de $k_B T$ où k_B est la constante de Boltzmann, à la température ambiante $T = 293 \text{ K}$. Conclure.

Du fait de l'agitation thermique, on doit considérer l'énergie potentielle d'interaction moyenne entre deux dipôles situés à une distance r dont les orientations relatives sont sujettes à des variations aléatoires. À température suffisamment élevée, on montre que cette énergie potentielle d'interaction moyenne est de la forme : $\langle \mathcal{E}_{12} \rangle = -\frac{C_K}{r^6}$ où $C_K = \frac{1}{k_B T} \left(\frac{p^2}{2\pi\epsilon_0} \right)^2$.

II.6. Donner un ordre de grandeur de C_K à la température ambiante $T = 293 \text{ K}$. Vérifier que la force \vec{F}_{12} qui dérive de cette énergie potentielle est attractive. On rappelle que $\vec{F}_{12} = -\text{grad} \langle \mathcal{E}_{12} \rangle$.

II.2. Calcul de la force d'adhérence du gecko au plafond

La force, calculée à la question précédente, correspond à une interaction de Van der Waals entre molécules polaires. Si on considère maintenant deux plans infinis parallèles, distants de D et séparant chacun un milieu solide (figure 3), on montre en prenant en compte l'ensemble des interactions de Van der Waals que la force surfacique entre les deux milieux s'écrit : $f(D) = \frac{A}{6\pi D^3}$. La constante A , appelée constante de Hamaker, dépend de la nature des interactions de Van der Waals et des densités moléculaires des deux solides en interaction.

II.7. Vérifier que la constante de Hamaker A est homogène à une énergie.

II.8. Un gecko de masse $m = 50 \text{ g}$ est suspendu par ses quatre pattes au plafond. Le gecko possède au total 6 millions de sétules, comportant chacune en moyenne 500 spatules. En modélisant une spatule par une surface carrée de $0.2 \mu\text{m}$ de côté située à une distance $D = 1 \text{ nm}$ du plafond, estimer le pourcentage de sétules utilisées par le gecko pour soutenir sa masse. On prendra $A = 10^{-19} \text{ J}$ et on négligera tout effet de bord.

Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a constaté qu'un gecko de 50 g utilise à son maximum d'adhérence uniquement 0.04% de ses sétules pour soutenir sa masse, peut-on bien imputer les facultés d'adhérence

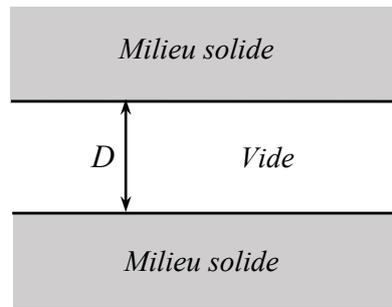


Fig. 3 – Deux milieux plans infinis en interaction

du gecko aux interactions de Van der Waals ? Pourquoi le gecko mobilise-t-il certainement davantage de sétules pour assurer son adhérence ?

II.9. À un instant pris pour origine, on suppose que le gecko lâche le plafond et chute de 10 cm avant de se rattraper à l'aide d'une patte à une surface verticale. Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a pu mesurer une force de cisaillement (opposée au glissement) de l'ordre de 10 N par patte, estimer la distance que doit parcourir le gecko lorsque sa patte est en contact avec le mur pour s'arrêter. On supposera qu'il mobilise 50% de la capacité de cisaillement maximale de sa patte.

Cette question fait appel à une démarche de résolution de problème. Il est notamment attendu de préciser chaque notation introduite, de présenter de façon claire les hypothèses retenues, de mener de bout en bout un calcul littéral, puis d'effectuer l'application numérique attendue.

Problème III - Réacteur plasma sous tension continue

Ce sujet est extrait du concours ATS 2017.

Ce sujet propose l'étude de plasmas dans un réacteur, appelé réacteur PKE (Plasma Kristall Experiment), rencontré dans quelques laboratoires dans le monde comme celui du GREMI situé à Orléans en France. Ce réacteur est une enceinte hermétique, formant un parallélépipède rectangle contenant deux électrodes métalliques reliées à une alimentation électrique.

Les deux électrodes du réacteur sont des disques centrés sur l'axe z , de rayon $a/2$ et d'épaisseur négligeable. Elles sont parallèles et leur distance est notée d ($d > 0$). On applique une tension continue $U > 0$ entre les deux électrodes du réacteur. L'électrode supérieure porte alors une charge $-q$ et l'électrode inférieure une charge $+q > 0$. Le réacteur contient un gaz d'argon peu dense, encore non ionisé et de permittivité diélectrique assimilable à celle du vide, notée ε_0 .

III.1. Champ électrique créé par l'électrode inférieure

L'électrode inférieure, d'axe Oz et de centre O , est supposée être chargée avec une densité surfacique de charge σ uniforme. On a $d \ll a$ et on va s'intéresser à l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par cette électrode pour des points M de cote z proches de l'axe Oz et tels que $0 < z < d$ (figure 4). Dans ces conditions on pourra, dans un premier temps, négliger les effets de bord et considérer que $\vec{E}(M) \approx E(z)\vec{u}_z$.

III.1. Énoncer le théorème de Gauss en nommant les grandeurs introduites et en rappelant leurs unités respectives.

III.2. Appliquer, en s'appuyant sur un schéma soigné, le théorème de Gauss afin de déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ aux points M envisagés en fonction de σ .

III.2. Champ électrique dans le réacteur complet

L'électrode supérieure, parallèle à l'électrode inférieure et de même axe, est chargée avec une densité surfacique uniforme $-\sigma$. On considère encore des points M proches de l'axe Oz pour lesquels on peut

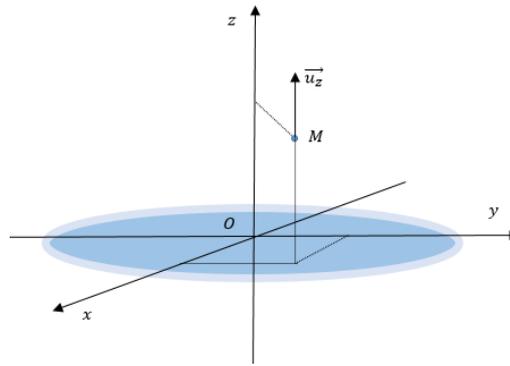


Fig. 4

encore négliger les effets de bord.

III.3. En utilisant le principe de superposition, exprimer le champ électrique total $\vec{E}_{\text{tot}}(M)$ à l'intérieur du réacteur en fonction de σ et ϵ_0 .

III.4. Représenter l'allure de la fonction $E_{\text{tot}}(z)$ pour $0 < z < d$.

III.5. Exprimer le potentiel électrostatique $V(M)$ associé à $\vec{E}_{\text{tot}}(M)$ en fonction de U , d et z en posant $V(z = 0) = U/2$.

III.6. Tracer l'allure de $V(z)$ pour $0 \leq z \leq d$.

III.3. Tension de claquage du gaz : résolution de problème

Cette question n'est pas guidée et demande de l'initiative de la part du candidat, une rédaction complète et soignée est attendue. Toutes les pistes de recherche explorées par le candidat doivent être consignées sur sa copie, si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Il est conseillé au candidat de ne pas excéder 10 minutes de réflexion sur cette question.

III.7. Le réacteur contient un gaz d'argon initialement neutre. On veut estimer la tension U_0 minimale à appliquer entre les électrodes permettant d'assurer l'ionisation de ce gaz en cherchant à décrire un début d'effet d'avalanche. Pour cela, on suppose l'existence d'un électron primaire initialement au repos, qui se détache d'une électrode. Cet électron interagit principalement avec le champ électrique du réacteur et va rentrer en collision avec un atome d'argon supposé immobile et situé au centre du réacteur après un parcours typique de $\ell \approx 1$ mm. Un électron secondaire peut être alors émis. Sachant qu'il faut fournir une énergie $\Delta\mathcal{E} \approx 2.5 \times 10^{-18}$ J à un atome d'argon pour l'ioniser, calculer U_0 .

La charge élémentaire sera approchée par la valeur $e \approx 10^{-19}$ C et on rappelle qu'une charge q en un point M et dans un potentiel électrostatique $V(M)$ est, à une constante près, affectée d'une énergie potentielle $qV(M)$.

III.4. Évaluation des effets de bord

Dans ce paragraphe, on souhaite étudier comment la prise en compte des effets de bord affecte les résultats concernant le champ et le potentiel électrique obtenus au paragraphe III.2. Pour faciliter l'étude, on se limitera à un problème à deux dimensions et on admettra que dans le plan $x = 0$, le potentiel électrostatique V satisfait l'équation de Laplace suivante¹ :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(y, z) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(y, z) = 0$$

On souhaite écrire un programme informatique permettant de déterminer la fonction potentiel électrostatique dans le réacteur alimenté en ± 10 V. La solution de ce problème doit vérifier l'équation de Laplace

1. L'équation de Laplace proposée ici s'obtient rigoureusement dans le cas d'un réacteur dont les électrodes sont assimilées à des plans rectangulaires de largeur finie (suivant y) et de longueur supposée infinie (suivant x). L'équation étudiée va donc mettre en évidence l'influence des effets de bord mais elle devrait être complétée pour décrire plus finement notre réacteur.

ci-dessus et les conditions aux limites imposées au potentiel $V(y, z)$ par l'expérimentateur qui sont ici $V(y = \pm a/2; z) = 0$.

Dans ce programme, on va chercher à calculer le potentiel en différents points $(x = 0; y_i; z_j)$ du réacteur avec $(0 \leq z_j \leq 20 \text{ mm})$ et $(-10 \text{ cm} \leq y_i \leq 10 \text{ cm})$. Le potentiel est calculé tous les millimètres verticalement et horizontalement. Ainsi, le potentiel est décrit dans un tableau de taille 201×21 où le réel $V(I, J)$ contient la valeur en volt de $V(y_i, z_j)$. Le tableau suivant représente une partie de la discrétisation de l'espace en cellules.

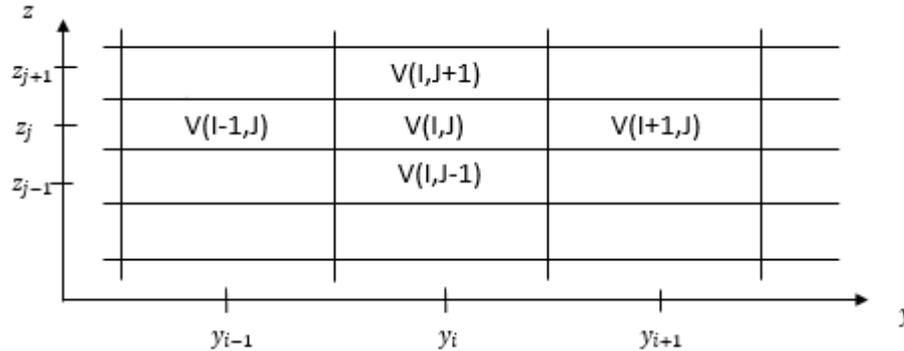


Fig. 5

Pour résoudre l'équation de Laplace, nous allons appliquer la méthode d'Euler. À titre d'exemple, cette méthode consiste à associer la dérivée partielle $\frac{\partial V}{\partial y}(y, z)$ à la quantité $V(I + 1, J) - V(I, J)$.

III.8. Écrire, avec la méthode d'Euler, la quantité $\frac{\partial V}{\partial z}(y, z)$ en fonction de $V(I, J + 1)$ et $V(I, J)$.

III.9. Écrire, avec la méthode d'Euler, la quantité $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(y, z)$ en fonction de $V(I, J + 1)$, $V(I, J - 1)$ et $V(I, J)$.

III.10. Écrire alors la définition à donner à $V(I, J)$ avec la méthode d'Euler, en fonction de $V(I + 1, J)$, $V(I, J + 1)$, $V(I - 1, J)$ et $V(I, J - 1)$.

On a représenté ci-dessous (figure 6) le résultat de la simulation en traçant les équipotentielles -7.5 V ; -5 V ; -2.5 V ; 0 V ; 2.5 V ; 5 V ; 7.5 V dans le plan $x = 0$ entre les électrodes.

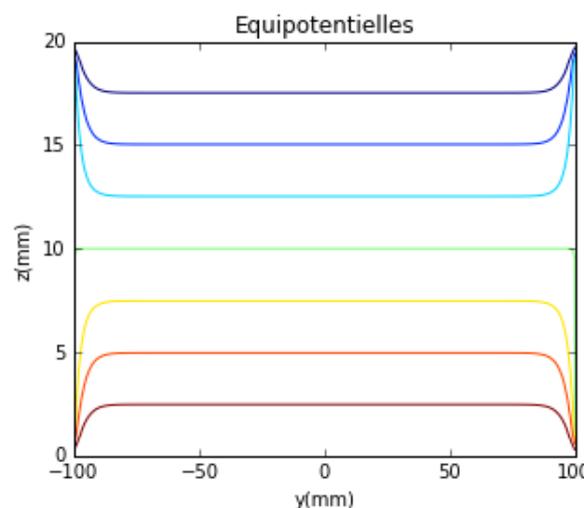


Fig. 6

III.11. Proposer, avec justification, un encadrement des valeurs y et z pour lesquelles l'approximation $\vec{E}(M) \approx E(M)\vec{u}_z$ est pertinente.

III.12. Dans cette zone où $\vec{E}(M) \approx E(M)\vec{u}_z$, pouvons-nous affirmer que le champ électrique est

uniforme? Justifier votre réponse.